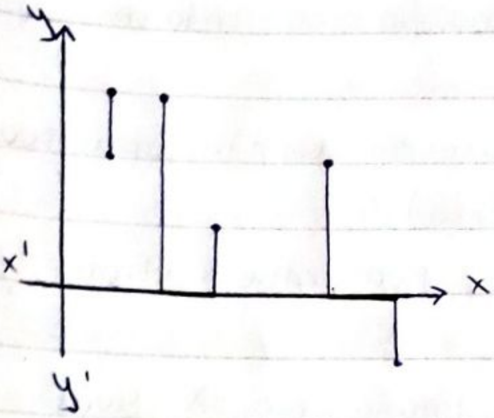
8ο online μαθημα.

28/4/2020

Φυλλάδιο 3

8 $d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) = \begin{cases} |\delta-\beta| & \text{αν } \alpha=\gamma \\ |\beta|+|\gamma-\alpha|+|\delta| & \text{αν } \alpha\neq\gamma \end{cases}$



α) d μετρική στο $\mathbb{R}^2$

Προφανώς $d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) \geq 0$

$d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) = 0 \iff (\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$

$d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) = d((\gamma,\delta),(\alpha,\beta))$

Αρκεί να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα

Έστω $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta),(\varepsilon,\zeta) \in \mathbb{R}^2$

Θ.δ.ο. $d((\alpha,\beta),(\varepsilon,\zeta)) \leq d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) + d((\gamma,\delta),(\varepsilon,\zeta))$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) $\alpha=\gamma=\varepsilon$. Η ανισότητα γράφεται $|\zeta-\beta| \leq |\delta-\beta| + |\zeta-\beta|$ που ισχύει

2) $\alpha=\gamma\neq\varepsilon$. -||- -||- $|\beta| + \cancel{|\varepsilon-\alpha|} + \cancel{|\zeta|} \leq |\delta-\beta| + |\delta| + \cancel{|\varepsilon-\gamma|} + \cancel{|\zeta|}$

$\iff |\beta| \leq |\delta-\beta| + |\delta|$ που ισχύει

3) $\alpha\neq\gamma=\varepsilon$ -||- -||- $|\beta| + |\varepsilon-\alpha| + |\zeta| \leq |\beta| + |\gamma-\alpha| + |\delta| + |\zeta-\delta|$

$\iff |\zeta| \leq |\delta| + |\zeta-\delta|$ που ισχύει

4) $\alpha=\varepsilon\neq\gamma$ -||- -||- $|\zeta-\beta| \leq |\beta| + |\gamma-\alpha| + |\delta| + |\varepsilon-\gamma| + |\zeta|$ που ισχύει

5) $\alpha\neq\gamma\neq\varepsilon\neq\alpha$ -||- -||- $|\beta| + |\varepsilon-\alpha| + |\zeta| \leq |\beta| + |\gamma-\alpha| + |\delta| + |\delta| + |\varepsilon-\gamma| + |\zeta|$

που ισχύει διότι $|\varepsilon-\alpha| \leq |\varepsilon-\gamma| + |\gamma-\alpha| \leq \ldots$

Άρα d μετρική

β) Η γεωμετρική ερμηνεία της d είναι η εξής:

Έχουμε τον άξονα x'x ως τη μοναδική οριζόντια ευθεία μαζί με όλες τις κατακόρυφες ευθείες (κεντρική λεωφόρος και οι κάθετες τους)

Η απόσταση δύο τυχαίων σημείων του επιπέδου είναι η απόσταση

που πρέπει να διανυθεί μέσω των παραπάνω "δρόμων" για τη μετακίνηση από το ένα σημείο στο άλλο.

γ) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Θα δ.ο. $\left(x, y + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d} (x, y)$

Πράγματι, $d\left(\left(x, y + \frac{1}{n}\right), (x, y)\right) = \left|y - \left(y + \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n} \to 0$

άρα $\left(x, y + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d} (x, y)$

δ) 1η περίπτωση: $y = 0$

Θα δ.ο. $\left(x + \frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{d} (x, 0)$

Πράγματι $d\left(\left(x + \frac{1}{n}, 0\right), (x, 0)\right) = |0| + \left|x - \left(x + \frac{1}{n}\right)\right| + |0| = \frac{1}{n} \to$

άρα $\left(x + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d} (x, 0)$

2η περίπτωση: $y \neq 0$

Αν δείξουμε ότι η ακολουθία $\left(x + \frac{1}{n}, y\right)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι βασική ως προς d δεν θα είναι συγκλίνουσα. Πράγματι $\forall n, m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$ έχουμε

$$d\left(\left(x + \frac{1}{n}, y\right), \left(x + \frac{1}{m}, y\right)\right) = |y| + \left|\left(x + \frac{1}{m}\right) - \left(x + \frac{1}{n}\right)\right| + |y| =$$

$$= 2|y| + \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \geq 2|y|$$

και άρα η ακολουθία $\left(\left(x + \frac{1}{n}, y\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι βασική ως προς τη μετρική d, συνεπώς δεν είναι συγκλίνουσα

ε) Για ν.δ.ο. η $g : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d)$ με $g(x, y) = (y, x)$ δεν είναι συνεχής αρκεί να βρούμε ακολουθία $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}^2$ και $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ώστε $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x, y)$ και $g(x_n, y_n) \overset{d}{\not\to} g(x, y)$

Σύμφωνα με ότι δείξαμε στο γ) θα ισχύει $\left(3, 5 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d} (3, 5$

ενώ η $g((3, 5+\frac{1}{n})) = (5+\frac{1}{n}, 3)$ δεν είναι συγκλίνουσα

στ) Αν $y=0$ τότε

$(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,0) \Leftrightarrow x_n \to x$ και $y_n \to 0$

Απόδειξη: Παρατηρούμε καταρχήν ότι $d((x_n, y_n), (x,0)) = |x-x_n| + |y_n|$

Έτσι αν $x_n \to x$ και $y_n \to 0$

τότε $d((x_n, y_n), (x,0)) = |x-x_n| + |y_n| \to 0+0=0$ άρα $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,0)$

Αντίστροφα, αν $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,0)$ τότε $d((x_n, y_n), (x,0)) \to 0$

δηλαδή $|x_n - x| + |y_n| \to 0$

και εφόσον $0 \leq |x_n - x| \leq |x_n - x| + |y_n|$

και $0 \leq |y_n| \leq |x_n - x| + |y_n|$

από θεωρία ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει ότι $x_n \to x$ και $y_n \to 0$.

Αν $y \neq 0$ τότε $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y) \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n = x$ $\forall n \geq n_0$ και $y_n \to y$

Απόδειξη: $\Leftarrow$) Αν $y_n \to y$ και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n = x$ $\forall n \geq n_0$

τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$d((x_n, y_n), (x,y)) = |y_n - y| \to 0$ άρα $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$

$\Rightarrow$) Αν δεν υπάρχει n_0 ώστε $x_n = x$ $\forall n \geq n_0$

τότε υπάρχουν $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ ώστε $x_{k_n} \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$d((x_{k_n}, y_{k_n}), (x,y)) = |y_{k_n}| + |x - x_{k_n}| + |y| \geq |y|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ όπου $y \neq 0$

άρα $(x_{k_n}, y_{k_n}) \not\to (x,y)$ άτοπο διότι $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$

Άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n = x$ $\forall n \geq n_0$

Έτσι για $n \geq n_0$ έχουμε $d((x_n, y_n), (x,y)) = |y_n - y|$

και εφόσον $d((x_n, y_n), (x,y)) \to 0$ συμπεραίνουμε ότι $y_n \to y$

ζ) Αν $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$ τότε συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$ δηλαδή $P(x_n, y_n) \to P(x,y)$ και $Q(x_n, y_n) \to Q(x,y)$

Από την αρχή της μεταφοράς συμπεραίνουμε ότι οι P, Q συνεχείς

η) Αν $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$ τότε από το προηγούμενο ερώτημα $x_n \to x$, $y_n \to y$ άρα $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho} (x,y)$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η $J: (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}, d)$ δεν είναι συνεχής.

Συμπαγείς μετρικοί χώροι (και συμπαγή σύνολα)

Ξεκινάμε με την εξής ορολογία: Αν X είναι ένα σύνολο, $A \subseteq X$ και $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X λέμε ότι η $(G_i)_{i\in I}$ είναι κάλυμμα (ή κάλυψη) του A αν ισχύει $A \subseteq (G_i)_{i\in I}$

Αν $J \subseteq I$ και ισχύει $A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$ λέμε ότι το $(G_i)_{i\in J}$ είναι υποκάλυμμα του $(G_i)_{i\in I}$ (για το A).

Αν (X,ρ) είναι μ.χ., $A \subseteq X$ και $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X με $A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$ λέμε ότι το $(G_i)_{i\in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του A.

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $K \subseteq X$. Το K λέγεται συμπαγές αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Ειδικότερα αν το $K=X$ είναι συμπαγές, ο X καλείται συμπαγής μετρικός χώρος.

Παρατήρηση: Αν (X,ρ) μ.χ. και $K \subseteq X$ τότε το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X $\overset{(\Leftarrow\Rightarrow)}{\text{αν-ν}}$ ο μετρικός χώρος $\underset{\text{σχετική μετρική στο } K}{(K,\rho_K)}$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Άσκηση (Άσκηση 2, Φυλλάδιο 4)

Παραδείγματα: 1) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι συμπαγές.

Έστω (X,ρ) μ.χ. και $\{x_1,\dots,x_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του X. Έστω $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. Τότε $\forall k\in\{1,\dots,n\}$ υπάρχει $i_k\in I$ ώστε $x_k \in G_{i_k}$

Άρα $\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$ επομένως το $\{x_1,\dots,x_n\}$ είναι συμπαγές.

2) Αν (X,ρ) μ.χ., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X και $x\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε το σύνολο $K=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ είναι συμπαγές

Έστω $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $K \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$

Τότε υπάρχει $i_0 \in J$ ώστε $x \in G_{i_0}$. Αφού το G_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G_{i_0}$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ $\forall n > n_0$. Έτσι $\forall n > n_0$ έχουμε $x_n \in B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G_{i_0}$
Για κάθε $k \in \{1, \dots, n_0\}$ επιλέγουμε $i_k \in I$ ώστε $x_k \in G_{i_k}$
Τότε $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} G_{i_k}$. Επομένως το σύνολο

$K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές.

3) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος
Για παράδειγμα η οικογένεια συνόλων $((-n,n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{R}$ χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.

4) Το $(0,1)$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$
π.χ. η οικογένεια $\left(\left(\frac{1}{n}, 1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $(0,1)$

και δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Με όμοιο τρόπο βλέπουμε ότι τα σύνολα $[0,1)$, $(0,1]$ δεν είναι συμπαγή.

5) Αν X τυχόν σύνολο και ρ η διακριτή μετρική στο X, ένα $K \subseteq X$ είναι συμπαγές στον (X,ρ) αν-ν είναι πεπερασμένο.
Πράγματι, α) Αν K πεπερασμένο τότε το K είναι συμπαγές
β) Αν K άπειρο τότε η οικογένεια $(\{x\})_{x\in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Εφόσον το G_{j_0} είναι ανοικτό υπάρχει $\delta > 0$ το οποίο μπορούμε να το ώστε $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{j_0}$
Εφόσον $x = \sup A$ υπάρχει $t \in A$ με $x - \delta < t$. Αφού $t \in A$ υπάρχει $J \subseteq I$, J πεπερασμένο ώστε $[a,t] \subseteq \bigcup_{i\in J\cup\{j_0\}} G_i$ με το $J \cup \{j_0\}$

πεπερασμένο, συμπεραίνουμε $x \in A$.
Δείχνουμε τώρα ότι $x = b$
Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x < b$.
Εφόσον $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{j_0}$ επιλέγοντας s με $x < s < \min\{x+\delta, b\}$ έχουμε ότι $[x, s] \subseteq G_{j_0}$ και άρα εφόσον $[a,x] \subseteq \bigcup_{i\in J\cup\{j_0\}} G_i$

Θα έχουμε $[a,s] \subseteq \bigcup_{i \in J \cup \{j_0\}} G_i$ συνεπώς $s \in A$. Αυτό είναι άτοπο εφόσον

$s > x = \sup A$. Επομένως $x = b$ και άρα $b \in A$.

Σημείωση: Η παραπάνω απόδειξη στηρίχθηκε στον ορισμό της συμπάγειας. Παρακάτω, αφού αποδείξουμε τον χαρακτηρισμό της συμπάγειας με χρήση ακολουθιών, θα έχουμε μια άλλη (πιο εύκολη) απόδειξη.

Γενικές ιδιότητες συμπαγών συνόλων (και συμπαγών μ.χ.)

Πρόταση: Αν (X,ρ) είναι ένας μ.χ. και K ένα συμπαγές υποσύνολο του X τότε το K είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη: Για ν.δ.ο. το K είναι κλειστό αρκεί ν.δ.ο. το $X \setminus K$ είναι ανοικτό. Έστω $x \in X \setminus K$ (και αναζητάμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus K$). Για κάθε $y \in K$ έχουμε $y \neq x$ άρα $\rho(y,x) > 0$. και για $\varepsilon_y = \frac{1}{2}\rho(y,x)$

έχουμε $B_\rho(x,\varepsilon_y) \cap B_\rho(y,\varepsilon_y) = \emptyset$. Η οικογένεια $(B_\rho(y,\varepsilon_y))_{y\in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K. Εφόσον το K είναι συμπαγές υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $y_1, \dots, y_n \in K$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k})$. Θέτουμε

$\varepsilon = \min\{\varepsilon_{y_1}, \dots, \varepsilon_{y_k}\}$ Τότε $\varepsilon > 0$ και $B_\rho(x,\varepsilon) \cap K \subseteq B_\rho(x,\varepsilon) \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k})$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \left(B_\rho(x,\varepsilon) \cap B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k})\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \left(B_\rho(x,\varepsilon_{y_k}) \cap B_\rho(y_k,\varepsilon_{y_k})\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \emptyset = \emptyset$$

συνεπώς $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus K$. Επομένως το $X \setminus K$ είναι ανοικτό άρα το K είναι κλειστό. Δείχνουμε τώρα ότι το K είναι φραγμένο. Θεωρώντας τυχόν $x \in X$ έχουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\rho(x,n)$ άρα $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\rho(x,n)$.

Αφού το K είναι συμπαγές υπάρχουν $d \in \mathbb{N}$ και $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{d} B_\rho(x, n_i)$ και θέτοντας $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_d\}$ έχουμε ότι

$K \subseteq B_\rho(x, n_0)$. Άρα $\operatorname{diam} K \leq \operatorname{diam}(B_\rho(x,n_0)) \leq 2n_0 < +\infty$

Επομένως το K είναι φραγμένο.

Παρατήρηση: Το αντίστροφο στην προηγούμενη πρόταση δεν ισχύει π.χ. αν X άπειρο σύνολο και ρ η διακριτή μετρική στο X τότε ο (X,ρ) δεν είναι συμπαγής ενώ το X είναι κλειστό και φραγμένο.

Πρόταση: Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.
Απόδειξη: Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η οικογένεια $\left(B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)\right)_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, άρα

υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο D_n του X ώστε $X=\bigcup_{x\in D_n} B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)$

Θέτουμε $D=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ τότε το D είναι αριθμήσιμο (ως αριθμήσιμη ένωση

πεπερασμένων συνόλων). Το D είναι πυκνό. Πράγματι αν $y\in X$ και $\varepsilon>0$ επιλέγουμε $n\in\mathbb{N}$ με $\frac{1}{n}<\varepsilon$ και αφού $X=\bigcup_{x\in D_n} B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)$

υπάρχει $x\in D_n$ ώστε $y\in B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)$. Άρα $x\in D_n$ και $\rho(x,y)<\frac{1}{n}<\varepsilon$

Άρα (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος.

Ορισμός: Μια οικογένεια συνόλων $(F_i)_{i\in I}$ λέμε ότι έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν για κάθε $J\subseteq I$ με J πεπερασμένο ισχύει $\bigcap_{i\in J} F_i\neq\emptyset$

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τους συμπαγείς μετρικούς χώρους με χρήση κλειστών συνόλων.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. Ο X είναι συμπαγής αν-ν για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

Απόδειξη: Έστω (X,ρ) συμπαγής μ.χ. και $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Αν $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ τότε $\bigcup_{i\in I} (X\setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = X\setminus\emptyset = X$ και η οικογένεια

$(X\setminus F_i)_{i\in I}$ αποτελείται από ανοικτά σύνολα εφόσον ο X είναι συμπαγής υπάρχει $J\subseteq I$ με J πεπερασμένο ώστε $X = \bigcup_{i\in J}(X\setminus F_i)$

Τότε $\bigcap_{i\in J} F_i = X\setminus \bigcup_{i\in J}(X\setminus F_i) = X\setminus X = \emptyset$ άτοπο, διότι η οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$

έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων $(F_i)_{i\in I}$ του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

Θα δείξουμε ότι ο (X,ρ) είναι συμπαγής. Αν ο (X,ρ) δεν ήταν συμπαγής, θα υπήρχε μια οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων $(G_i)_{i\in I}$ του X ώστε $X = \bigcup_{i\in I} G_i$ και για κάθε $J\subseteq I$ με J πεπερασμένο $X \neq \bigcup_{i\in J} G_i$

Θέτουμε $F_i = X\setminus G_i$ $\forall i\in I$. Τότε η $(F_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X και για κάθε $J\subseteq I$ με J πεπερασμένο ισχύει $\bigcap_{i\in J} F_i = \bigcap_{i\in J}(X\setminus G_i) = X\setminus \bigcup_{i\in J} G_i \neq \emptyset$ δηλαδή η $(F_i)_{i\in I}$

έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Από υπόθεση προκύπτει ότι $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset$ δηλαδή $\bigcap_{i\in J}(X\setminus G_i)\neq\emptyset \Rightarrow X\setminus \bigcup_{i\in J} G_i \neq \emptyset \Rightarrow$

$\bigcup_{i\in J} G_i \neq \emptyset$ άτοπο. Άρα ο (X,ρ) είναι συμπαγής.